Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU

Técnicas Básicas Ciberseguridad quantum

M.V. Carriegos

presenta el resumen del trabajo

Introducing a New Edge Centrality Measure: The Connectivity Rank Index.

J. Zhou, Y. Zhang, J. Lu, G. Chen

IEEE Trans. Syst. Man, and Cybernetics (2024).

19 de abril de 2024

SERIE DE RESÚMENES EN ESPAÑOL

Palabras clave: Conectividad algebráica, red compleja, centralidad de una arista, teoría espectral de grafos.

Introducción

Consideramos un grafo $G = (V, E)$ donde V es un conjunto finito (de vértices) del grafo y $E \subseteq V \times V$ son las aristas del grafo; es decir $(i, j) \in E$ si y solo si los vértices i y j están conectados. En este documento todos los grafos son no dirigidos ($(i, j) \in E \Leftrightarrow (j, i) \in E$), y no hay bucles en los vértices ($\forall i \in V, (i, i) \notin E$). En estas condiciones, la matriz de adyacencia de G viene dada por $A(G) = (a_{ij})$ donde $a_{ij} = 1$ si $(i, j) \in E$ y $a_{ij} = 0$ si $a_{ij} \notin E$. La matriz $A(G)$ es una matriz $0 - 1$, simétrica, de ceros en la diagonal.

A partir de la matriz de adyacencia $A(G)$ se construye la matriz Laplaciana del grafo. Consideramos $D(G)$ la matriz diagonal de grados de los nodos de G. Entonces la matriz Laplaciana $L(G)$ del grafo G se obtiene

$$L(G) = D(G) - A(G)$$

Entonces, la matriz Laplaciana $L = L(G)$ es siempre definida positiva. Podemos ordenar el espectro $\mathrm{Spec}(L) = \{\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots\}$ donde el autovalor λ_0 es siempre 0, y su multiplicidad como autovalor es igual al número de componentes conexas que tiene el grafo G.

El autovalor $\lambda_2(L)$ del Laplaciano del grafo tiene mucho interés desde el punto de vista de la conectividad de los grafos. De hecho,

- Si $G_1 \subseteq G_2$ entonces $\lambda_2(G_1) \leq \lambda_2(G_2)$
- Se tiene $\lambda_2 \geq 0$.
- $\lambda_2 = 0$ si y solo si G no es conexo.

Así, tiene interés el estudiar la variación del autovalor λ_2 cuando se borra (o retira) una arista del grafo.

1. El índice de conectividad

Dado el laplaciano L de un grafo G se define $L^- = L^-_{ij}$ el laplaciano del grafo G al que se le ha borrado la conexión (i, j). Del mismo modo, $L^+ = L^+_{ij}$ denota el laplaciano del grafo al que se le ha añadido la conexión (i, j). A partir de aquí, los valores

$$\Delta\lambda^-_{ij} = \lambda_2(L^+) - \lambda_2(L)$$

$$\Delta\lambda^+_{ij} = \lambda_2(L^+) - \lambda_2(L)$$

denotan la variación del segundo autovalor λ_2 frente a borrado o adición de un vértice concreto.

El Índice de Conectividad (CRI) de un enlace presente se define de forma relativa como

$$I^-_{ij} = \frac{\Delta\lambda^-_{ij}}{\left|\text{mín}\, \Delta\lambda^-_{mn}\right|}$$

y mide la importancia de un enlace frente a su posible borrado.

El Índice de Conectividad (CRI) de un enlace ausente se define de forma relativa como

$$I^+_{ij} = \frac{\Delta\lambda^+_{ij}}{\left|\text{máx}\, \Delta\lambda^+_{mn}\right|}$$

y mide la importancia de un enlace ausente frente a su posible inclusión.

En caso que los denominadores se anulen se define $I = 0$. El Índice toma vaores entre -1 y $+1$ y la propiedad fundamental es que cuanto más cercano esté el valor $|I_{ij}|$ a 1, más importante es en enlace en la red.

2. Aproximación del índice de conectividad

El cálculo del índice de conectividad es sencillo aunque costoso computacionalmente. Se hace necesario dar algunas aproximaciones buenas que permitan aligerar la estimación de su valor y por consiguiente de la importancia de una conexión en una red.

De hecho, se da un algoritmo para la estimación del CRI en términos de autovalores del laplaciano del grafo. Si $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)^t$ es autovector unitario asociado al autovalor $\lambda_2(L)$, se tiene:

$$\Delta\lambda_{ij}^{+} = \lambda_2(L^{+}) - \lambda_2(L) \leq (x_i - x_j)^2$$

y

$$|\Delta\lambda_{ij}^{-}| = \lambda_2(L) - \lambda_2(L^{-}) \geq (x_i - x_j)^2$$

Más aún, para redes grandes se tienen las aproximaciones

$$\Delta\lambda_{ij}^{+} = \lambda_2(L^{+}) - \lambda_2(L) = (x_i - x_j)^2$$

$$\Delta\lambda_{ij}^{-} = \lambda_2(L^{-}) - \lambda_2(L) = -(x_i - x_j)^2$$

3. Conclusiones

Como consecuencia de las anteriores aproximaciones tenemos una manera eficiente de estimar el índice de conectividad de un enlace. El único paso computacionalmente costos es el cálculo del autovector *vecx* asociado al autovalor λ_2 del grafo. Entonces se tiene

$$I_{ij}^{-} = \frac{-(x_i - x_j)^2}{\text{máx}\left\{(x_m - x_n)^2 : (m, n) \in G\right\}}$$

$$I_{ij}^{+} = \frac{(x_i - x_j)^2}{\text{máx}\left\{(x_m - x_n)^2 : (m, n) \notin G\right\}}$$

Las anteriores aproximaciones permiten dar algoritmos sencillos y de complejidad $O(N^3)$ para calcular aproximaciones efectivas del indicador CRI para grafos grandes (cientos de nodos). Esta aproximación CRI es, de hecho, cmoputacionalmente más sencilla que la medida usual de centralidad de enlace (*Edge Betweenness Centrality*) y da una información equivalente sobre la importancia de un enlace para la conectividad de la red.

El artículo propone una nueva medida para la centralidad de una conexión en un grafo: el Índice de Conectividad o CRI. El CRI de un enlace se normaliza mediante sus efectos en el segundo autovalor no nulo del laplaciano del grafo $\lambda_2(G)$.

La aproximación del CRI basada en autovalor no nulo asociado a λ_2 permite acelerar el cómputo del CRI desde $O(N^5)$ hasta $O(N^3)$. De forma especial, en grafos grandes, se pueden localizar rápidamente los enlaces más influyentes maximizando y minimizando $|x_i - x_j|$ donde $vecx = (x_i)^t$ es autovalor unitario asociado a λ_2.

El método propuesto en el artículo puede ser aplicado a la sincronización de redes, el control por pin o la diseminación de información.

Referencias

· J. L. Dormann and D. Fiorani,, *"Magnetic Properties of Fine Particles"*, , North-Holland, Amsterdam (1992).